UNIVERSITÉ PAUL SABATIER	LICENCE STS

Année universitaire 2010–2011

L1 PC : PHYSIQUE

Contrôle terminal, session n° 1
durée 2 h

Question de cours : onde sinusoïdale

Écrire la forme $y(x, t)$ d'une onde sinusoïdale de célérité v_0 se propageant le long de l'axe Ox vers les x croissants. On définira en particulier l'amplitude a, la pulsation ω et le vecteur d'onde k de cette onde, ainsi que la relation qui lie ω et k. On donnera ensuite la longueur d'onde λ et la période T en fonction de ces quantités.
Correction :
$y = a\cos(\omega t - kx)$ (phase acceptée, mais pas obligatoire) 2
on a $\omega = v_0 k$, $T = 2\pi/\omega$, $\lambda = 2\pi/k$ 2+2+2

Exercice 1 : pendule avec un clou

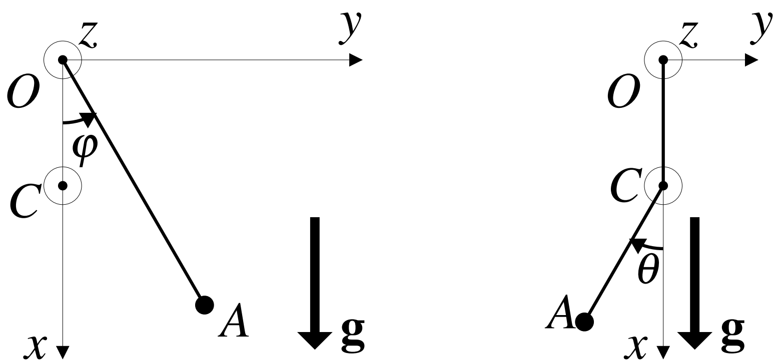

FIGURE 1 – Schéma du pendule bloqué par un clou. Quand le pendule est à droite de l'axe Ox, la longueur entière de la ficelle est disponible. Quand il est à gauche, un clou parallèle à Oz bloque la ficelle en C, et il ne reste qu'une longueur moindre disponible.

On considère le système représenté sur la figure 1. Un point matériel A de masse m est suspendu à une ficelle de longueur $OA = \ell_1 = 1$ m. Quand le pendule est à droite de l'axe Ox, toute la longueur de la ficelle est disponible. Par contre, quand le pendule est à gauche, un clou bloque la ficelle au point C tel que $OC = 50$ cm, et l'on peut considérer alors que la longueur du pendule est $CA = \ell_2 = 50$ cm. On note φ l'angle que fait la ficelle avec la verticale quand le pendule est à droite de l'axe Ox. On note θ l'angle que fait la ficelle avec la verticale quand le pendule est à gauche. On oriente les angles dans le sens trigonométrique, si bien que $\varphi \geq 0$ et $\theta \leq 0$. Les conditions initiales sont les suivantes : on écarte le pendule vers la droite d'un angle φ_0, et on le lache sans vitesse initiale. Le but de l'exercice est de calculer jusqu'à quel angle θ_0 il remonte sur la gauche. On négligera tout frottement.

1. Bilan des forces : à quelle(s) force(s), en plus du poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, le point matériel A est-il soumis ? On donnera la direction et le sens de chaque force.
   Correction :
   Il n'y a qu'une autre force, la tension du fil, dirigée le long du fil
   vers le point d'attache (schéma accepté...) 2

2. Montrer que lors du mouvement de A, seul le poids a un travail non nul.
   Correction :
   La tension du fil est perpendiculaire au déplacement.
   Son travail est donc nul. 2

3. Donner l'expression de la coordonnée x du point A quand le pendule est à droite, en fonction de ℓ_1 et φ.
   Correction :
   $x = \ell_1 \cos\varphi$ 1

4. Calculer OC en fonction de ℓ_1 et ℓ_2, puis donner l'expression de la coordonnée x du point A quand le pendule est à gauche, en fonction de ℓ_1, ℓ_2 et θ.
   Correction :
   $OC = \ell_1 - \ell_2$ 1
   $x = \ell_1 - \ell_2(1 - \cos\theta)$ 1

5. On admet que l'énergie potentielle associée au poids est $E_p = -mgx$, où g est la norme du vecteur $\mathbf{g}$, et où x est la coordonnée de A sur l'axe Ox. Écrire cette énergie potentielle $E_p(\varphi)$ quand le pendule est à droite de l'axe Ox.
   Correction :
   $E_p = -mg\ell_1 \cos\varphi$ 1

6. Écrire l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ quand le pendule est à gauche.
   Correction :
   $E_p = -mg\ell_1 + mg\ell_2(1 - \cos\theta)$ 1

7. Donner l'énergie mécanique E_m du point A, sachant que l'on a laché le pendule sans vitesse initiale du côté droit, à une position donnée par l'angle $\varphi = \varphi_0$.
   Correction :
   $E_m = -mg\ell_1 \cos\varphi_0)$+ une phrase pour dire que l'énergie cinétique est nulle 1+1

8. En déduire l'angle maximum θ_0 atteint par A du côté gauche.
   Correction :
   L'énergie mécanique se conserve OU
   $E_m = -mg\ell_1 + mg\ell_2(1 - \cos\theta_0) = -mg\ell_1 \cos\varphi_0$ 2
   soit $\cos\theta_0 = 1 - \ell_1/\ell_2(1 - \cos\varphi_0)$ 1

9. Application numérique : calculer la valeur de φ_0 pour que θ_0 soit égal à $-\pi/2$.
   Correction :
   $\cos\varphi_0 = 1/2$, soit $\varphi_0 = \pi/3$ 1+1

Exercice 2 : un modèle simplifié de radiation atomique : l'électron élastiquement lié

On considère le modèle suivant pour un atome de sodium : l'électron de valence de masse m_e est relié au noyau de l'atome de sodium (supposé fixe) par un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos nulle. L'électron est de plus soumis à une force de frottement $\mathbf{F}_f = -\alpha\mathbf{v}$. On suppose aussi pour simplifier que le mouvement se fait sur l'axe Ox. On néglige bien sûr le poids de l'électron. (Bien que très simple, ce modèle permettait de prédire assez bien les propriétés des atomes avant l'invention de la théorie quantique).

1. On considère que toutes les quantités intervenant dans l'émission de rayonnement par un électron s'expriment en fonction des quatre quantités suivantes :
   – la vitesse de propagation de l'onde rayonnée c ;
   – la pulsation de l'onde rayonnée $\omega = \sqrt{k/m_e}$;
   – la charge de l'électron $-e$;
   – enfin la permittivité du vide ε_0.

   Donner les dimensions de ces quatre quantités en fonction de celles des unités fondamentales SI : longueur $[L]$, masse $[M]$, temps $[T]$ et intensité de courant électrique $[I]$. Pour ε_0, on pourra utiliser la relation donnée en fin d'énoncé.

   Correction :
   $[c] = [L][T]^{-1}$ 1
   $[\omega] = [T]^{-1}$ 1
   $[e] = [I][T]$ 1
   $[\varepsilon_0] = [I]^2[T]^4[M]^{-1}[L]^{-3}$ 1

2. Quelle est la dimension de α en fonction des dimensions des unités fondamentales SI ? On suppose, comme dit plus haut, que α s'exprime en fonction des quantités c, ω, e et ε_0. En déduire, en se servant de l'équation aux dimensions, que :

   $$\alpha = f\frac{\omega^2 e^2}{\varepsilon_0 c^3}$$

   où f est un facteur numérique sans dimension. On prendra (sans chercher à le démontrer) $f = 1/6\pi$. NB : la relation en fin d'énoncé est de nouveau utile pour cette question.

   Correction :
   $[\alpha] = [M][T]^{-1}$. On cherche $\alpha = f\omega^a e^b \varepsilon_0^c c^d$, et donc $[M][T]^{-1} = [L]^{d-3c}[T]^{-a-d+b+4c}[M]^{-c}[I]^{b+2c}$. Soit :

   $$\begin{aligned} c &= -1 \\ d &= -3 \\ b &= 2 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

   CQFD. Mais une vérification directe est tout aussi valable. 2

3. Écrire la deuxième loi de Newton pour le mouvement de l'électron.

   Correction :
   $m_e\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$ 1

4. En déduire que l'équation du mouvement se met sous la forme :

   $$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

et donner les expressions de τ et ω.
Correction :
$1/\tau = \alpha/m_e$ 1
$\omega = \sqrt{k/m_e}$ 1

5. Quelle est la valeur numérique de τ ? *On donne les valeurs numériques nécessaires à ce calcul à la fin de cet exercice.*
Correction :
$\tau = m/\alpha = (3/2)(4\pi\varepsilon_0 c^3 m_e/\omega^2 e^2) = 1,564312432 \times 10^{-8}$ s 1

6. On peut démontrer que la lumière émise par l'atome est une onde de fréquence $\omega/2\pi$. Expérimentalement, on constate que cette fréquence est de $0{,}508\,333\,195\,8(15) \times 10^{15}$ Hz. En déduire que $1/\tau \ll \omega$.
Correction :
$\omega \simeq 3 \times 10^{15} \gg (1/\tau) \simeq 10^8$ 1

7. Calculer la solution générale de l'équation (1). On demande la démonstration complète, sans approximation.
Correction :
On demande le calcul, c.-à-d. équation caractéristique, solution de cette équation pour l'amortissement faible et forme des deux solutions.
L'ensemble : 3

8. Condition initiale : on suppose que l'électron a été éloigné à une distance $x_0 = 10^{-10}$ m du noyau sans vitesse initiale ($v_0 = 0$). Représenter sur un graphe la forme de la solution correspondante. On ne demande pas l'expression de $x(t)$, seulement une courbe.
Correction :
Allure de la solution, graphe avec des axes étiquetés : 1+1

Quelques constantes fondamentales

- Masse de l'électron $m_e = 0{,}910\,938\,188\,(72) \times 10^{-30}$ kg ;
- Vitesse de la lumière $c = 2{,}997\,924\,58 \times 10^8$ m.s^{-1} ;
- $e^2/4\pi\varepsilon_0 = 230{,}707\,705\,6 \times 10^{-30}$ J.m.